

단국대학교 2026학년도 편입학모집 필기고사

자연계열
수학 가이드답안
문제유형 (A형)



수학 가이드 답안지 [자연계열] 문제유형 A형 (1~25번 3점 / 25~30번 5점)

1. $a^2 = 2$ 이므로 $a = \sqrt{2}$

2. $f'(x) = 2x - 2$ 이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 2$

3. 구하는 넓이는 $\int_1^3 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^3 = \frac{26}{3}$

4. 로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

5. (입체의 부피) $= 2\pi \int_0^1 y(y^2 - y^3) dy = \frac{\pi}{10}$

6. $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq 1$. $y = x^2 + 2x - 1$ 이라 하면 $y \geq -2$ 이므로 $f(x)$ 는 $y = 0$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

7. $f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n$ 라 하면, $a_{10} = \frac{(-1)^{10} \times 11! \times 2^{-12}}{10!}$ 이므로 $2^{10} \times a_{10} = \frac{11}{4}$

8. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 1, 1 \rangle$ 이므로 $0 = \mathbf{r}(a) \cdot \mathbf{v}(a) = 2a - 4$ 에서 $a = 2$

9. 곡면 $z = f(x, y)$ 위의 점 $(1, 2, 5)$ 에서의 접평면의 방정식은 $z - 5 = f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$ 이므로 $2x + 4y - z = 5$ 이다. 따라서 $a + b + c = 1$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\pi} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta\} r dr d\theta + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\pi} \iint_{D_n} 2 dx dy = 2$

11. (둘러싸인 E의 부피) $= \iiint_E 1 dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{x^2+y^2}^1 1 dz dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr d\theta = \frac{\pi}{2}$

12. $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$ 에서 $\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 0, 1 \rangle \times \langle 0, -1, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, 1 \rangle$.

따라서 $a + b + c = \sqrt{2}$

13. $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} e^s \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} e^s \sin t$, $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} e^s \sin t + \frac{\partial u}{\partial y} e^s \cos t$ 이므로 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) e^{2s}$

에서 $g(s, t) = e^{2s}$. 따라서 $g(1, 1) = e^2$

14. $\mathbf{s}'(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ 이므로 $\mathbf{s}'(0) \cdot \mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle \times \langle 0, 0, 2 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -2$

15. $\nabla f(x, y, z) = \langle 4x + 4y - 2, 4x + 10y, -1 \rangle$ 이므로 $\nabla f(1, 0, 2) = \langle 2, 4, -1 \rangle$ 이고 라그랑주 승수법에 의하여 $\nabla f(1, 0, 2) = \lambda \langle a, 4, b \rangle$ 인 상수 λ 가 존재한다. 따라서 $\lambda = 1$ 이고 $a + b = 1$

16. e^{mx}, xe^{mx} 가 해이므로 특성방정식 $m^2 + 2m + a = 0$ 은 중근 $m = -1$ 을 갖는다. 따라서 $a = 1$

별해: $y = xe^{mx}$ 를 $y'' + 2y' + ay = 0$ 에 대입하면 $m = -1, a = 1$

17. 라플라스 변환 $\mathcal{L}$ 을 이용하면 $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2 + 1}$ 에서 $f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$. 따라서 $f(\pi) = 1$

(단, $U(t)$ 는 단위계단함수)

18. $P_2(x) = \sum_{k=0}^2 a_k x^k$ 를 Legendre 방정식에 대입하고 $P_2(1) = \sum_{k=0}^2 a_k = 1$ 를 이용하면 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. 따라서 $P_2(-1) = 1$. (참고: n 차 Legendre 다항식 $P_n(x)$ 에 대하여 $P_n(-1) = (-1)^n$)

19. $\text{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 이므로 $\mathbf{F} = \nabla f$ 인 포텐셜 함수 f 가 존재한다. 포텐셜 함수 f 를 구하면 $f(x, y, z) = x^2 y^3 z + C$

(C 는 상수)이고, 선적분의 기본정리에 의하여 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[x^2 y^3 z + C \right]_{(2,0,0)}^{(\sqrt{3},1,\frac{\pi}{6})} = \frac{\pi}{2}$

20. 닫힌곡선 C 의 안쪽 영역을 D 라 할 때, Green 정리에 의하여

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D y dA = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{y^2}^{1-y^2} y dx dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (y - 2y^3) dy = \frac{1}{8}$$

21. Stokes 정리에 의하여 $2 \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4$ 이므로 $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2$

22. $\text{curl} \mathbf{F} = \langle 4cxy^3 - 3bxz^2, -cy^4, bz^3 - ax^2 \rangle$. 점 P 에서 $\text{curl} \mathbf{F} = \langle -2, -1, 1 \rangle$ 이므로 $a = 1, b = 2, c = 1$. $\text{div} \mathbf{F} = 2xy$ 이므로 점 P 에서 divergence는 2

23. $S_0 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 이라 하고, $S' = S \cup S_0$ 의 안쪽 영역을 E 라 하자. divergence 정리에 의하여

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 0 dV = 0 \text{이므로 } \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle dS = 2 \iint_{S_0} dS = 2\pi$$

24. 삼차방정식의 근과 계수의 관계로 부터 $a + b + c = 4, ab + bc + ca = 1, abc = -5$. 따라서

$$\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} = 52$$

25. $[T]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $[T]_{\mathbb{B}}$ 의 2행과 3행은 독립이므로 rank는 2보다 크거나 같다. 따라서 $[T]_{\mathbb{B}}$ 의 rank가 2

이기위한 필요충분조건은 $\det [T]_{\mathbb{B}} = 0$. 그러므로 $k = -1$

26. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 선형변환이므로 $T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(2\theta + 45^\circ) \\ \sqrt{2} \sin(2\theta + 45^\circ) \end{bmatrix}$ 이고,

또한 $\begin{bmatrix} \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(40^\circ + 45^\circ) \\ \sqrt{2} \sin(40^\circ + 45^\circ) \end{bmatrix}$. 따라서 $\theta = 20^\circ$

27. 일계 선형미분방정식 $kf(x) + f'(x) = e^x$ 의 일반해는 $f(x) = \frac{1}{k+1}e^x + Ce^{-kx}$ 이고, $k \neq 1$ 이라면

$\{e^x, e^{-x}, e^{kx}, e^{-kx}\}$ 는 선형독립이므로 조건 $f(x) = f(-x)$ 을 만족시키지 못한다. 즉, $k = 1$

28. $0 = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - 1)$ 이므로 1은 A 의 고윳값이다. $A (= PDP^{-1})$, D 는 대각행렬)의 모든 고윳값을 $1, \lambda_1, \lambda_2$ 라 하면 $1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2$ 이고, $A^{-1} (= PD^{-1}P^{-1})$ 의 고윳값의 합은 $1 + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $\det A = 1 \times \lambda_1 \times \lambda_2 = -2$

29. $A^T A = I$ 에서 A 의 세 번째 열벡터 $\frac{1}{3} \langle a, b, c \rangle$ 는 A 의 첫 번째 열벡터 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \langle 2, -2, 1 \rangle$ 과 두 번째 열벡터 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \langle 1, 2, 2 \rangle$ 에 모두 수직이고 길이가 1이다. 따라서 $\frac{1}{3} \langle a, b, c \rangle = \pm (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \pm \frac{1}{3} \langle 2, 1, -2 \rangle$.
그러므로 $|a + b + c| = 1$

30. W 에는 $\mathbf{0}$ 함수가 포함되어 있으므로 $0 = \mathbf{0}(0) = a$ 이고 $0 = \int_0^b \mathbf{0} dx = c$ 이다. 따라서 $f(x) \in W$ 일 때,
 $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 라 하면 $a_0 = 0$ 이다. 만약 $b = 0$ 이면 조건 $\int_0^b f(x) dx = 0$ 은 항등식(무의미한 조건)이 되므로 W 의 차원 d 는 3이지만, 조건 $a + b + c = d$ 를 만족하지 못한다. 따라서 $b \neq 0$ 이고,
 $\int_0^b f(x) dx = \frac{a_3 b^4}{4} + \frac{a_2 b^3}{3} + \frac{a_1 b^2}{2} = 0$ 이므로 $d = 2$ 이다. 그러므로 $b = 2$