

단국대학교 2025학년도 편입학모집 필기고사

자연계열(오후)
수학 가이드답안



수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오후 > (1~25번 3점 / 26~30번 5점)

1. 로그함수 $\ln x$ 가 연속함수이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+x) = 1$

2. $f'(x) = \cos x$ 이고, $\cos x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{5}{3}\pi$

3. $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 3$

4. $\nabla f(1, 2, 3) = \langle 4, -8, -12 \rangle$ 이므로 $\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \langle 1, -2, -3 \rangle \cdot \langle a, b, 1 \rangle = 0$ 에서 $a-2b=3$

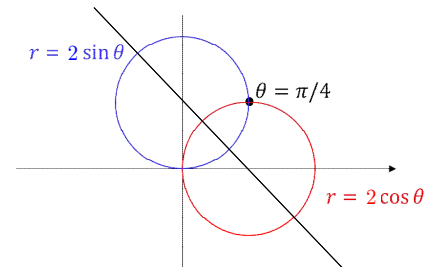
5. $\text{curl } \mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\text{div } \mathbf{F} = 2z$ 이므로, 점 $(1, 1, 1)$ 에서 $a+b+c+d=2$

6. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 로 부터 $-a_{11}+6+0=1$, $0+2+2a_{23}=0$ 이므로 $a_{11}+a_{23}=4$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x - 1}} dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{3}-} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x - 1}} dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{3}-} \left[-\sqrt{2\cos x - 1} \right]_0^t = 1$

8. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 을 미분하면 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 이고, 한편 $f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} 3(-1)^k x^{3k+2}$ 이므로
 x^{59} 의 계수는 $60a_{60} = -3$ 에서 $a_{60} = -\frac{1}{20}$

9. $r = 2\sin\theta$ 와 $r = 2\cos\theta$ 는 각각 직선 $\theta = 0$ 과 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 에 중심이 있는 원이고,
 그림과 같이 두 원의 중심을 지나는 직선에 대하여 대칭이다. 따라서
 원점 O에서 두 접선이 수직으로 만나므로 점 P에서도 수직으로 만난다.



10. (회전체의 부피) $= \int_{-2}^2 \pi(9-x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (9-x^2) dx = \frac{92}{3}\pi$

11. 점 $(1,0)$ 에서 점 (x,y) 까지의 거리를 $d(x,y)$ 라고 하면 $f(x,y) = [d(x,y)]^2 - 1$ 이다. 영역 D 에서 $d(x,y)$ 가
 최대가 되는 점은 $(0, \pm 2)$ 이므로 $f(0, \pm 2) = 4$

12. $\mathbf{r}_1(0) = (1, 2, 3) = \mathbf{r}_2(1)$ 이므로 $\mathbf{r}_1'(0) \times \mathbf{r}_2'(1) = \langle 1, 0, -1 \rangle \times \langle 2, 2, 1 \rangle = \langle 2, -3, 2 \rangle$ 로 부터
 접평면의 방정식은 $2x - 3y + 2z = 2$

13. A 의 모든 고윳값의 합은 $a+1+b=2$. 따라서 $a+b=1$ ($ab=-2$). 또한 A^2 의 고윳값은 $a^2, b^2, 1$ 이므로
 합은 $a^2+b^2+1=6$

14. $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, -5, 7 \rangle$ 이므로 (부피) $= \frac{1}{6} \left| \langle 3, -2, -4 \rangle \cdot \langle -6, -5, 7 \rangle \right| = 6$

15. $\frac{\partial u}{\partial t} = (y^2 + 2xy)se^t + (2xy + x^2)(-s^2e^{-t})$ 이고 $s = a, t = 0$ 일 때 $x = a, y = a^2$ 이므로

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} = -a^4(a-1) \text{에서 } a = 1$$

16. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ 일 때,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx = \iint_D (1-x^2-y^2) dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)r dr d\theta = \frac{\pi}{8}$$

17. 라그랑주 승수법에 의해서, 적당한 실수 λ 에 대하여 $24a^2 = \lambda b e^{ab}, 3b^2 = \lambda a e^{ab}$. 따라서 $2a = b$ 이고 $8a^3 + b^3 = 16$ 에서 $a = 1, b = 2$

18. $u = x - 2y, v = x + y$ 라고 하면 $x = \frac{u+2v}{3}, y = \frac{-u+v}{3}$ 이므로 변수변환 $T: (u, v) \mapsto (x, y)$ 에 대한

야코비안은 $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$. 또한 $S = \{(u, v) \mid -6 \leq u \leq 6, -1 \leq v \leq 3\}$ 라 할 때, $T(R) = S$ 이므로

$$\iint_R (x+y) dA = \frac{1}{3} \iint_S v du dv = \frac{1}{3} \int_{-1}^3 \int_{-6}^6 v du dv = 16$$

19. C_1, C_2 를 각각 $\mathbf{r}_1(t) = \frac{\pi}{2}t\mathbf{i}, \mathbf{r}_2(t) = \frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \pi t\mathbf{j}$ ($0 \leq t \leq 1$)로 매개화하면

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + \int_{C_2} \left(\frac{\pi}{2} \sin \pi t \mathbf{i} + \pi t \mathbf{j} \right) \cdot (\pi \mathbf{j}) dt = \int_0^1 \pi^2 t dt = \frac{\pi^2}{2}$$

20. 닫힌곡선 C 의 안쪽 영역을 R 라 할 때, 그린 정리에 의하여

$$\int_C (e^{2x} \sin 2y - y) dx + (e^{2x} \cos 2y + x) dy = \iint_R 2 dA = 8\pi$$

21. 평면 $x + 2y + z = 4$ 위의 $\triangle PQR$ 의 경계와 내부를 S 라 하면 단위법선벡터 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ 이다.

스토크스 정리에 의하여 $\text{curl} \mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 이므로 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = 36$

22. 발산 정리에 의하여 $\text{div} \mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$ 이므로

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div} \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (r^2 + z^2) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3 + \frac{1}{3}r \right) dr d\theta = \frac{5\pi}{6}$$

23. $[\langle 5, -1, 9 \rangle]_B = \langle 1, a, 2 \rangle$ 이므로 $\langle 5, -1, 9 \rangle = \langle 1, 2, 1 \rangle + a\langle 2, 9, 0 \rangle + 2\langle 3, 3, 4 \rangle$ 에서 $a = -1$

24. $W(F, G) = \det \begin{bmatrix} F & F' \\ G & G' \end{bmatrix} = \det \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & f' \\ g & g' \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} W(f, g) = 2e^x$. 따라서 $k = 2$

25. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2^2}$ 라 하면 $\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2} \sin 2t$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^3 + 4s} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2u du = \frac{1}{4} (1 - \cos 2t). \text{ 그러므로 } f \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

26. Recurrence relation에 의하여 $J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^{-\frac{3}{2}} \sin x - x^{-\frac{1}{2}} \cos x)$. $a+b = -2$

27. $\sigma(E) = \iiint_E (3 - 2x^2 - 2y^2 - 3z^2) dV$ 가 최대가 되는 영역은 $3 - 2x^2 - 2y^2 - 3z^2 < 0$ 인 영역을 포함하지

않아야 한다. 따라서 $E_0 = \{(x, y, z) \mid 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 3\}$ 에서 $\sigma(E)$ 가 최대이다.

$$(E_0 \text{의 부피}) = \iiint_{E_0} dV = \int_{-1}^1 \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3(1-z^2)}{2}} dA dz = \int_{-1}^1 \frac{3\pi}{2} (1-z^2) dz = 2\pi$$

28. T 의 표준행렬은 $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (가) $\det[T] \neq 0$ 이므로 $\ker T = \{\vec{0}\}$; [참]. (나) $\text{rank } T + \text{null } T = 3$

에서 $\text{rank } T = 3$; [거짓]. (다) $[T]^2$ 은 (1행 1열이 1이 아니므로) 항등행렬이 아니다; [거짓]

29. $a \neq 1$ 일 때; 조건 (1)의 일반해는 $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + A \cos x + B \sin x$ (c_1, c_2, A, B 는 상수)꼴 이므로 모두 조건 (2)를 만족시키지 않는다. $a = 1$ 일 때; $y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$ 꼴의 특수해를 갖고, 이때 일반해는 모두 조건 (2)를 만족시킨다. 그러므로 $a = 1$

30. $y' + \sec x y = \tan x$ 의 적분인자 $e^{\int \sec x dx} = \sec x + \tan x$ 를 양변에 곱하여 적분하면

$$(\sec x + \tan x)y = \int \sec x \tan x dx + \int \tan^2 x dx + C = \sec x + \tan x - x + C \quad (C \text{는 적분상수}).$$

$y(0) = 2$ 이므로 $C = 1$ 이고, 따라서 $f(1) = 1$