

수 학

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ 의 값은? [2.1점]

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 존재하지 않는다.

2. 점 $(2, 1)$ 에서 함수 $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ 의 값이 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 u 라 할 때, 방향도함수 $D_u f(2, 1)$ 의 값은? [2.1 점]

- ① $\frac{\sqrt{145}}{2}$
- ② $\frac{\sqrt{155}}{2}$
- ③ 7
- ④ $\frac{17}{2}$

3. 중심이 원점이고 반지름이 2인 구면을 S 라 할 때, $F = \langle xz, yz, z^3 \rangle$ 에 대해 $\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, dS$ 의 값은? (단, $\mathbf{n}$ 은 곡면 S 에 대해 밖으로 향하는 단위 법선벡터) [2.1 점]

- ① $\frac{83}{10}\pi$
- ② $\frac{97}{10}\pi$
- ③ $\frac{104}{5}\pi$
- ④ $\frac{128}{5}\pi$

4. 극 곡선 $r^2 = 5 \cos 2\theta$ 를 y 축에 대하여 회전시켜 얻은 곡면의 넓이는? [4.1 점]

- ① 10π
- ② $10\sqrt{2}\pi$
- ③ $10(2 - \sqrt{2})\pi$
- ④ $25\sqrt{2}\pi$

5. $P = \frac{x+y}{y+z}$, $x = u + \cos v + 4 \sin w$,
 $y = u - \cos v + 4 \sin w$, $z = u + \cos v - 4 \sin w$
 일 때, $u = 2$, $v = \frac{\pi}{3}$, $w = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\partial^2 P}{\partial w \partial u}$ 의
 값은? [2.1 점]

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ $\sqrt{3}$

6. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 의 모든 특이값
 (singular value)의 합은? [3.8 점]

- ① 34
- ② 25
- ③ 16
- ④ 8

7. 미분방정식

$2(x-1)^2 y'' + (x-1)y' - 3y = 0$, $y(2) = 3$,
 $y'(2) = 2$ 의 해 $y = y(x)$ 에 대하여 $y(5)$ 의
 값은? [3.8 점]

- ① $\frac{61}{4}$
- ② $\frac{63}{4}$
- ③ $\frac{65}{4}$
- ④ $\frac{67}{4}$

8. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3}x} \arctan \frac{y}{x} dy dx$
 $+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \arctan \frac{y}{x} dy dx$ 의 값은?

[4.1 점]

- ① 1
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ $\frac{\pi^2}{9}$
- ④ $\frac{\pi^2}{12}$

9. 다음 <보기>의 모든 행렬들의 행렬식의 값의 합은? [4.1 점]

<보기>

$\neg, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sqsubset, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sqsupset, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ① -1
② 1
③ 3
④ 9

10. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n}$ 가 수렴하는 정수 x 의 개수는? [3.8 점]

- ① 3
② 4
③ 5
④ 6

11. 유클리드 공간 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1 + x_3 + x_4 \right\}$$

에 대하여, 벡터 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 의 E 위로의

정사영을 $\text{proj}_E u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ 라 하자.

$a + 2b + 3c + 4d$ 의 값은? [3.8 점]

- ① 1
② 2
③ 3
④ 4

12. 타원면 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ 에서

$f(x, y, z) = \ln(6x^2 + 1) + \ln(3y^2 + 1) + \ln(2z^2 + 1)$
의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때,
 $M + m$ 의 값은? [5.6 점]

- ① $\ln 432$
- ② $\ln 189$
- ③ $\ln 34$
- ④ $\ln 7$

13. xy 평면에 직사각형 $[0, \sqrt{3}] \times [0, 3]$ 이 있
다. 이 직사각형 위에 놓인 곡면 $x^2 + z^2 = 4$
의 넓이는? [4.1 점]

- ① 1
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ π
- ④ 2π

14. 함수 $f(x) = \frac{2x^4 + 8x^3 - x^2 - 30x}{24}$ 에 대하

여, 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(-|x| - 1)$
라 하자. 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 k 라 할 때,
함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 로 둘러싸
인 부분의 넓이는? [4.3
점]

- ① $\frac{971}{320}$
- ② $\frac{971}{160}$
- ③ $\frac{17}{10}$
- ④ $\frac{3}{10}$

15. 미분방정식

$$\frac{dr}{d\theta} + r \tan \theta = 2 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

의 해 $r = r(\theta)$ 에 대하여 $r\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은?

[4.3 점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ③ $\frac{\sqrt{2}}{8}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{12}$

16. 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x,$$

$y(0) = 2, y'(0) = 4$ 의 해가

$$y(x) = ae^{3x} + be^{-x} + ce^x + p\sin x + q\cos x$$

일 때, $a \times b \times c \times p \times q$ 의 값은? [4.3 점]

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3

17. 임의의 정사각행렬 V 의 모든 고유값으로 이루어진 집합을 E_V 라 하자.

$$\text{행렬 } S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{와 다음 <보기>에}$$

대하여, $D = E_A \cup E_B \cup E_C$ 라 할 때, 집합 D 의 모든 원소의 합은? (단, A^{-1} 은 A 의 역행렬) [3.8 점]

<보기>

$$\neg. A = S \quad \neg. B = S^3 \quad \neg. C = S^{-1}$$

- ① $\frac{251}{6}$
- ② $\frac{263}{6}$
- ③ $\frac{251}{3}$
- ④ $\frac{263}{3}$

18. 자연수 $n (n \geq 3)$ 에 대하여 직선

$$y = x + n \text{ 이 함수 } y = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ 의 그래프와}$$

만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표를 각각 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ 이라 하자.

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n, \alpha_n\beta_n + \beta_n\gamma_n + \gamma_n\alpha_n = b_n,$$

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n = c_n \text{ 이라 할 때,}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{a_n^3 + b_n^3 + c_n^3} = \frac{1}{2025} \text{ 를 만족시키는 } k \text{ 의}$$

값은? [5.6 점]

- ① 675
- ② 729
- ③ 813
- ④ 905

19. 행렬 $P = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}} & p \\ b & \frac{1}{\sqrt{3}} & q \\ c & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ 는 행렬

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 를 직교대각화한다.

$a + 2b + c + p + 3q$ 의 값은? (단, a, p 는 음수)
[4.3 점]

- ① $\frac{\sqrt{6}}{6} + \sqrt{2}$
- ② $\sqrt{2}$
- ③ $-\frac{\sqrt{6}}{6} + \sqrt{2}$
- ④ 0

20. xy 평면에서 시계 반대 방향으로 도는 원 C 가 $x^2 + y^2 = 1$ 일 때,

$\oint_C \frac{-y}{4x^2 + 9y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + 9y^2} dy$ 의 값은?

[4.3 점]

- ① 0
- ② $\frac{\pi}{3}$
- ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ π

21. $\int_1^e \frac{\ln x^2}{(1 + \ln x)^2} dx$ 의 값은? [4.1 점]

- ① $\frac{e}{2} - 1$
- ② $\frac{e}{2} - \frac{1}{2}$
- ③ $e - 2$
- ④ $e - 1$

2 $\int_{-\sqrt{3}}^{-1} 2 \tan^{-1} x dx + \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$ 의 값은? [4.1 점]

- ① $\pi(1 - \sqrt{3})$
- ② $\pi(\sqrt{3} - 1)$
- ③ $\pi(1 - \sqrt{3}) + \ln 4$
- ④ $\pi(\sqrt{3} - 1) + \ln 4$

23. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 10 & -7 \end{pmatrix}$, 벡터 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

에 대하여 $Ax = b$ 의 최소제곱해를 $\hat{x}$ 라 하자.

$b - A\hat{x}$ 의 모든 성분의 합은? [5.6 점]

① $-\frac{2}{3}$

② $-\frac{5}{3}$

③ $-\frac{5}{6}$

④ $-\frac{7}{6}$

24. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x}{1 + e^{-f(x)}} dx \text{의 값은?}$$

(가) 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + f(-x)}{x - a} \text{의 값이 존재한다.}$$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = -1$

(다) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 16}{f(x) - f(0)} = \frac{1}{2}$

[5.6 점]

① $3\pi^2 - 26$

② $3\pi^2 - 24$

③ $4\pi^2 - 26$

④ $4\pi^2 - 24$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\csc^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$ 의 값은?

[4.1 점]

① 0

② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$