

단국대학교 2025학년도 편입학모집 필기고사

자연계열(오전)
수학 가이드답안



수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오전 > (1~25번 3점 / 26~30번 5점)

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 2$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ 이므로 } f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$3. 2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt \text{ 이다. 따라서 } \int_0^2 f(x) dx = 4$$

$$4. (\text{거리}) = \frac{|2(1)+1(-1)+(-2)(4)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 4$$

$$5. A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } \det A = \frac{5}{4}$$

$$6. \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \ln x \Big|_t^1 - 2 \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x}(\ln x - 2) \Big|_t^1 \right) = -4$$

$$7. \det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \lambda^2 - (a+1)\lambda + a - 4 = 0 \text{ 에서 } a = -2$$

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} \text{ 이므로, (호의 길이)} = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx = \left. \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x} \right|_1^4 = 6$$

$$9. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ 에서 } a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{-1}{k(k+1)} \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right] = -1$$

$$10. \text{곡률 } \kappa(t) = \frac{|\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \times \langle 0, 2, 6t \rangle|}{|\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle|^3} \text{ 이므로 } \kappa(0) = \frac{|\langle 1, 0, 0 \rangle \times \langle 0, 2, 0 \rangle|}{|\langle 1, 0, 0 \rangle|^3} = 2$$

$$11. \text{curl } \mathbf{F} = axz\mathbf{i} - ayz\mathbf{j} + (y^2 - x^2)\mathbf{k} \text{ 이므로, } \text{curl } \mathbf{F} \Big|_{(1,1,1)} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \text{ 에서 } a = 2$$

$$12. x^2 + y^2 = 1 \text{ 에서 } f(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1 + y^2, -1 \leq y \leq 1 \text{ 이므로 } M = 2, m = 1. \text{ 그러므로 } M + m = 3$$

$$13. (\text{호의 길이}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8$$

14. 조건 (2)에 의하여 $\overline{RP}$ 가 직각삼각형에서 빗변이고 $\angle Q = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = \langle 1, 1, -2 \rangle \cdot \langle a-2, 1, 1 \rangle = 0 \text{에서 } a=3$$

15. D 가 $y=x^2$, $x=1$, $y=0$ 으로 둘러싸인 영역일 때,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} \, dx dy = \iint_D \sqrt{x^3+1} \, dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} \, dy dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} \, dx = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

$$16. \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^2 e^{x+y+z} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x+y} (e^2-1) dy dx = \int_0^1 (e^2-1)(e-e^x) dx = e^2-1$$

17. $f_x(x, y)=0=f_y(x, y)$ 로 부터 $(-1, -1), (2, 2), (-1, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. $f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-6y$,

$f_{yy}=-6x+24y-6$ 이므로 $f_{xx}(-1,-1)<0$, $f_{xx}(-1,1)<0$ 이고, 또한 $D=f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2$ 라 할 때,

$D\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)<0$ 이고, $f_{xx}(2,2)>0$, $D(2,2)>0$. 따라서 $f(x,y)$ 의 극솟점은 $(2,2)$

$$18. C \text{를 } \mathbf{r}(t)=2\cos t \mathbf{i}+2\sin t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{로 매개화하면, } W=\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t+2\cos t) dt=4$$

$$19. \text{그린 정리에 의하여 } \int_C e^{x^2} dx + 2 \tan^{-1} x dy = \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 \frac{2}{1+x^2} dy dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

20. $S=\{(x,y,z) \mid x+y+z=1, x^2+y^2 \leq 1\}$ 의 단위법선벡터 $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ 이다. S 의 xy 평면으로의 정사영을 R

라 하면, 스토크스 정리에 의하여 $\text{curl} \mathbf{F}=(-3x^2-3y^2)\mathbf{k}$ 이므로

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R (-\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2) \sqrt{3} \, dA = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2) r \, dr d\theta = -\frac{3\pi}{2}$$

$$21. \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1' + a\mathbf{u}_2', \mathbf{u}_2 = b\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_2' \text{ 이므로 } a=b=1. a+b=2$$

$$22. y'+y=xy^2 \text{에서 } u=y^{-1} \text{라 하면 } \frac{du}{dx} - u = -x \text{이므로 } u(x) = Ce^x + x + 1. \text{ 따라서 } y(x) = \frac{1}{Ce^x + 1 + x}.$$

$$y(0)=1 \text{이므로 } C=0 \text{이고 } f(x) = \frac{1}{1+x} \text{이다. } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{1+x} = \infty \text{이려면 } a = -1$$

$$23. W'(f,g)(1) = f(1)g''(1) - g(1)f''(1) = 2$$

24. 실수 $a \geq 0$ 에 대하여, $H(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (a \leq t) \end{cases}$ 라 하자. $f(t) = \begin{cases} 3 & (t < 2) \\ k & (2 \leq t) \end{cases} = 3 + (k-3)H(t-2)$ 이므로

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(3) + \mathcal{L}((k-3)H(t-2)) = \frac{3}{s} + \frac{k-3}{s} e^{-2s} \text{이다. 따라서 } F(3) = 1 + \frac{k-3}{3} e^{-6} \text{에서 } k=4$$

$$25. y_0 = J_{\frac{1}{2}}(x) \text{는 베셀방정식 } x^2 y'' + x y' + x^2 y - \frac{1}{4} y = 0 \text{의 해이므로 } 4x^2(y_0'' + y_0) + 4x y_0' = y_0. \text{ 따라서 } \alpha = 1$$

26. 발산 정리에 의하여 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{x+y}^3 2x dz dy dx = 4$

27. $u = x + 2y, v = x - y$ 라 하자. $x = \frac{u+2v}{3}$ 이고 $y = \frac{u-v}{3}$ 이므로 변수변환 $T(u, v) = (x, y)$ 에 대하여

야코비안은 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$. 또한 $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq u\}$ 라 할 때, $T(S) = D$ 이고

$\iint_D \cos(x+2y)\sin(x-y)dA = \frac{1}{3} \iint_S \cos u \sin v dv du = \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^u \cos u \sin v dv du = \frac{\sin 3}{3} - \frac{\sin 6}{12} - \frac{1}{2}$ 에서 $a = \frac{1}{2}$

28. (가): $T(\langle 1, 1, 1 \rangle + k\langle 1, 2, 1 \rangle) = \langle -1, 0, 1 \rangle, k \in \mathbb{R}$; [참]. (나): T 의 치역의 원소는 평면 $x + 2y + z = 0$ 과

평행한 벡터; [거짓]. (다): $T(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle) = \langle v_2 - 2v_3, v_3 - v_1, 2v_1 - v_2 \rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; [참]

29. $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 이므로 $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (\sin |\mathbf{r}(t)|) \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. 즉, 곡선 위의 모든

점에서 $f(\mathbf{x})$ 의 함숫값이 같으므로 $4 = f(P) + f(Q) = 2f(Q)$ 에서 $f(Q) = 2$

30. $t = \ln x$ 로 치환하고 $z(\ln x) = y(x)$ 라 할 때, $z'' - 4z' + 4z = t$ 이므로

$y(x) = z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} t = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln x$. $y(1) = 1$ 이므로 $C_1 = \frac{3}{4}$ 이고 $y'(1) = 1$

이므로 $C_2 = -\frac{3}{4}$. 따라서 $f(x) = \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{4} x^2 \ln x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln x$ 이고, $f(e) = \frac{1}{2}$