

수 학 시 험 문 제 (자연계 A형)

지망모집단위:

수험번호:

성명:

- * 문제지의 각 페이지가 모두 A 형인지 확인 바랍니다.
- * 본 대학교 2022 학년도 편입학모집 자연계열 필답고사는 총 7 쪽 25 문항이며, 총점은 200 점입니다.
- * 문항별 배점은 문항 번호 옆에 표시되어 있습니다.
- * 오답감점제가 시행되며 틀린 답은 배점의 $\frac{1}{5}$ 만큼 감점됩니다. 무응답은 감점이 없습니다.
- * 답안은 별도의 OMR 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 표기하여야 합니다.
- * 연습장, 계산기 및 전자기기는 사용할 수 없습니다.

1. [7.1 점] $f(x, y) = x^2(2y + 1)^3$ 에 대하여 $(x, y) = (2, 1)$ 인 점에서의 이계편도함수 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 의 값을 구하면?
- ① 72 ② 108 ③ 144 ④ 216 ⑤ 288

2. [7.1 점] 매개곡선 $x = t^4 - 1$, $y = t^3 - 17t + 1$ 에 대하여 $t = 1$ 일 때, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 의 값을 구하면?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. [7.1 점] 함수 $f(x) = (x - \sqrt{1 - x^2}) \arccos x$ 에 대하여 $f(\cos \frac{4\pi}{3})$ 를 구하면?

- ① $\frac{(-1 + \sqrt{3})\pi}{3}$ ② $-\frac{(1 + \sqrt{3})\pi}{3}$
 ③ $\frac{2(-1 + \sqrt{3})\pi}{3}$ ④ $-\frac{2(1 + \sqrt{3})\pi}{3}$
 ⑤ $\frac{2(1 + \sqrt{3})\pi}{3}$

4. [7.1 점] 곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$)의 길이를 구하면?

- ① 16 ② 15 ③ 14 ④ 13 ⑤ 12

5. [7.4 점] 적분 $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ 를 구하면?

- ① $1 - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ ② $1 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
 ③ $3 - \sqrt{2} + \ln(3 + \sqrt{2})$ ④ $3 + \sqrt{2} + \ln(3 + \sqrt{2})$
 ⑤ $1 + \sqrt{2} + \ln(3 + \sqrt{2})$

6. [7.4 점] 극곡선 $r = \theta^2$ ($0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$) 의 길이를 구하면?

- ① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

7. [7.4 점] 적분 $\int_{1/2}^1 (\arccos x)^2 dx$ 를 구하면?

- ① $\frac{\pi}{6} - 2 + \sqrt{3} - \frac{\pi^2}{72}$ ② $\frac{\pi}{6} + 2 + \sqrt{3} - \frac{\pi^2}{72}$
 ③ $\frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 1 - \frac{\pi^2}{18}$ ④ $\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1 - \frac{\pi^2}{18}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1 + \frac{\pi^2}{18}$

8. [7.4 점] 곡선 $y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) 을 y 축을 중심으로 회전시켜 얻어지는 회전면의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$ ② $\frac{\pi}{5}(17\sqrt{17} - 1)$
 ③ $\frac{\pi}{4}(17\sqrt{17} - 1)$ ④ $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17} - 1)$
 ⑤ $\frac{\pi}{2}(17\sqrt{17} - 1)$

9. [7.7 점] 행렬 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 을 직교대각화하였을

때, 주대각선에 나타나는 수들의 곱을 구하면?

- ① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

10. [7.7 점] 곡선 $y = e^{-x^2}$ 과 세 직선 $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ 로 둘러싸인 영역을 y 축을 중심으로 회전시켜 얻은 입체의 부피를 구하면?

- ① $\left(1 - \frac{1}{e}\right)\pi$ ② $\left(1 - \frac{2}{e}\right)\pi$ ③ $\left(2 - \frac{4}{e}\right)\pi$
 ④ $\left(2 - \frac{3}{e}\right)\pi$ ⑤ $\left(3 - \frac{4}{e}\right)\pi$

11. [7.7 점] 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}$ 이 있다.

0 이 아닌 임의의 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$ 이 성립하도록 하는 순서쌍 (a, b) 로 옳지 않은 것을 고르면?

- ① (2, 0) ② (3, -1) ③ (4, 2)
 ④ (12, -3) ⑤ (18, 4)

12. [7.7 점] 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 $x = 4$ 에서 테일러 급수의 수렴 반지름을 구하면?

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-2)^n n!}{3^{n(n+1)}}$$

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

13. [8.1 점] 벡터마당 $\mathbf{F}(x, y) = 2xye^{2y} \mathbf{i} + x^2(2y + 1)e^{2y} \mathbf{j}$ 와
경로 $C : \mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ ($0 \leq t \leq 1$)에 대하여
선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 을 구하면?

- ① $\frac{e^2}{2}$ ② e^2 ③ $\frac{3e^2}{2}$ ④ $2e^2$ ⑤ $\frac{5e^2}{2}$

14. [8.1 점] 실수 a, b, c, d 에 대하여 다음 행렬이 유니타리
(unitary) 대각화가 가능할 필요충분 조건은?

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ c + di & -a - bi \end{bmatrix}$$

- ① $b = 0, c = 0$
② $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, ad - bc = 0$
③ $ad - bc = 0$
④ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$
⑤ $a = 0, d = 0$

15. [8.1 점] 반복적분

$$\int_0^1 \int_y^{y^{1/3}} e^{-x^2} dx dy$$

를 구하면?

- ① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{3e}$ ③ $\frac{1}{4e}$ ④ $\frac{1}{5e}$ ⑤ $\frac{1}{6e}$

16. [8.1 점] 다음 급수 중 수렴하는 것만을 있는 대로
고르면?

$$\begin{array}{ll} (\neg) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} & (\neg) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{2n+1} \right) \\ (\neg) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} & (\neg) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \end{array}$$

- ① $\neg, \neg$ ② $\neg, \neg$ ③ $\neg, \neg$
④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg$

17. [8.5 점] 영역 $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4xy + 2y^2 + z^2 \leq 1\}$ 에 대하여 삼중적분

$$\iiint_R (4x^2 + 4xy + 2y^2 + z^2)^2 dV$$

를 구하면?

- ① $\frac{5\pi}{7}$ ② $\frac{4\pi}{7}$ ③ $\frac{3\pi}{7}$ ④ $\frac{2\pi}{7}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

18. [8.5 점] 극곡선 $C : r = 1 + 2 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)와 벡터마당 $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \frac{-2y}{(2x-1)^2 + y^2}, \frac{2x-1}{(2x-1)^2 + y^2} \right\rangle$ 에 대하여 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 을 구하면?

- ① 0 ② 2π ③ 4π ④ 6π ⑤ 8π

19. [8.5 점] S 가 곡면 $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ 일 때, 벡터마당 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^3, z^3, y^3 \rangle$ 의 흐름량 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{2}\pi}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}\pi}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}$ ⑤ $\sqrt{2}\pi$

20. [8.5 점] 다음 특이적분 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고르면?

$(\text{㉠}) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx \quad (\text{㉡}) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{㉢}) \int_0^1 (\ln x)^2 dx$

- ① ㉠
② ㉠, ㉡
③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

21. [8.8 점] 원점과 곡면 $xy^2z^3 = 3$ 위의 점 P 사이의 거리가 최소일 때, P의 z좌표의 최솟값을 m이라 하자. m^{12} 을 구하면?

- ① $\frac{241}{4}$
② $\frac{243}{4}$
③ $\frac{245}{4}$
④ $\frac{247}{4}$
⑤ $\frac{249}{4}$

22. [8.8 점] 곡면 $z = x^2 - 2y^2$ ($x^2 + 4y^2 \leq 1$)의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{(5\sqrt{5}-9)\pi}{12}$
② $\frac{(5\sqrt{5}-7)\pi}{12}$
③ $\frac{5(\sqrt{5}-1)\pi}{12}$
- ④ $\frac{(5\sqrt{5}-3)\pi}{12}$
⑤ $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{12}$

23. [8.8 점] $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 은 원점을 중심으로 하는 회전 변환이다. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 은 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot T(\mathbf{y})$ 를 만족시키는 선형변환이다.

정규직교기저에 대한 $S = R^{-1} \circ T \circ R$ 의 행렬 $[S]$ 에 대하여 항상 옳은 것을 고르면?

- ① $[S]$ 는 대칭행렬이다.
- ② $[S]$ 는 반대칭행렬이다.
- ③ $[S]$ 는 대각행렬이다.
- ④ $[S]$ 는 직교행렬이다.
- ⑤ $[S]$ 는 가역행렬이다.

24. [9.2 점] 좌표공간에서 곡면 $z = x^2$ 과 세 평면 $y = z$, $y = 0$, $z = 1$ 로 둘러싸인 영역의 부피를 구하면?

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

25. [9.2 점] 구 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 위의 점 P와 점 $(2, 3, -4)$ 를 지나는 직선이 S 에 접할 때, P의 y 좌표의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{16}{29}$ ② $\frac{15}{29}$ ③ $\frac{14}{29}$ ④ $\frac{13}{29}$ ⑤ $\frac{12}{29}$